



openHPI
Einführung in die Mathematik der Algorithmik
– Landau-Notation

Timo Kötzing und Pascal Lenzner

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



n identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Vergleich der Ideen:

- haben bereits für 19683 Münzen verglichen

Welche Idee ist für 20000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 100000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 1000000 Münzen besser?

- benötigen allgemeine Analyse für n Münzen! (große n sind interessant)

Idee 1:

1 Münze wird mit allen anderen verglichen

$$n - 1$$

Idee 2:

je 2 Münzen werden entfernt

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

Idee 3:

je 4 Münzen werden entfernt

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1$$

Idee 4:

je k Münzen werden entfernt, danach Idee 3

$$\leq \sqrt{n} + 1$$

Idee 5:

immer halbieren

$$\log_2(n)$$

Idee 6:

immer dritteln

$$\log_3(n)$$

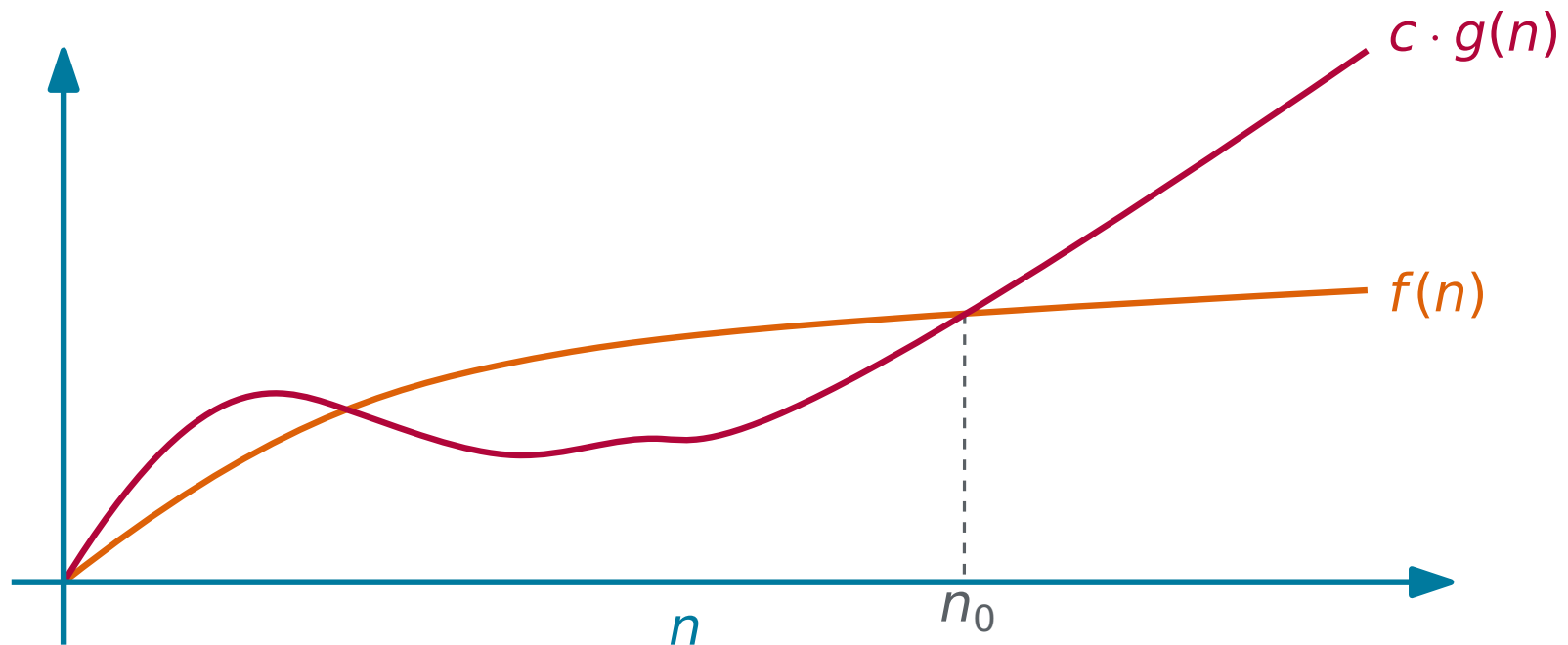
Wie verhalten sich die Funktionen für wachsendes n ?

Aufgabe: Wollen Funktionen nach ihrem Wachstum klassifizieren

Definition: Funktionen $f(n)$ wächst höchstens so schnell wie Funktion $g(n)$, falls ab einem $n_0 \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

$$f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\text{Formal: } f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Aufgabe: Wollen Funktionen nach ihrem Wachstum klassifizieren

Definition: Funktionen $f(n)$ wächst höchstens so schnell wie Funktion $g(n)$, falls ab einem $n_0 \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

$$f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\text{Formal: } f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Beispiel: $f(n) = \frac{n}{2} + 1$ und $g(n) = n - 1$

$f(0) = 1$	$f(1) = 1,5$	$f(2) = 2$	$f(3) = 2.5$	$f(4) = 3$	$f(5) = 3.5$	$f(6) = 4$
$g(0) = -1$	$g(1) = 0$	$g(2) = 1$	$g(3) = 2$	$g(4) = 3$	$g(5) = 4$	$g(6) = 5$

■ $\frac{n}{2} + 1 \in \mathcal{O}(n - 1)$: wähle $n_0 = 4$ und $c = 1$.

■ $n - 1 \in \mathcal{O}(\frac{n}{2} + 1)$: wähle $n_0 = 0$ und $c = 2$.

Die Funktionen $\frac{n}{2} + 1$ und $n - 1$ wachsen bis auf konstante Faktoren gleich schnell.

Aufgabe: Wollen Funktionen nach ihrem Wachstum klassifizieren

Definition: Funktionen $f(n)$ wächst höchstens so schnell wie Funktion $g(n)$, falls ab einem $n_0 \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

$$f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\text{Formal: } f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Beispiel: $f(n) = \frac{n}{4} + 1$ und $g(n) = \sqrt{n} + 1$

$f(0) = 1$	$f(1) = 1,25$	$f(2) = 1,5$	$f(3) = 1,75$	$f(4) = 2$	$f(5) = 2,25$	$f(6) = 2,5$
$g(0) = 1$	$g(1) = 2$	$g(2) = 2,41..$	$g(3) = 2,73..$	$g(4) = 3$	$g(5) = 3,23..$	$g(6) = 3,44..$

■ $\sqrt{n} + 1 \in \mathcal{O}\left(\frac{n}{4} + 1\right)$: wähle $n_0 = 0$ und $c = 2$.

Die Funktion $\sqrt{n} + 1$ wächst höchstens so schnell wie die Funktion $\frac{n}{4} + 1$.

Gilt auch $\frac{n}{4} + 1 \in \mathcal{O}(\sqrt{n} + 1)$?

Aufgabe: Wollen Funktionen nach ihrem Wachstum klassifizieren

Definition: Funktionen $f(n)$ wächst höchstens so schnell wie Funktion $g(n)$, falls ab einem $n_0 \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

$$f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\text{Formal: } f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Beispiel: $f(n) = \frac{n}{4} + 1$ und $g(n) = \sqrt{n} + 1$

Gilt auch $\frac{n}{4} + 1 \in \mathcal{O}(\sqrt{n} + 1)$?

Antwort: Nein!

Beweis: Zeigen, dass $\neg(\frac{n}{4} + 1 \in \mathcal{O}(\sqrt{n} + 1))$ gilt:

$$\neg(f \in \mathcal{O}(g)) \iff \neg(\exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n))$$

$$\neg(f \in \mathcal{O}(g)) \iff \forall n_0 \geq 0 \quad \neg(\exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n))$$

$$\neg(f \in \mathcal{O}(g)) \iff \forall n_0 \geq 0 \quad \forall c > 0 \quad \neg(\forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n))$$

$$\neg(f \in \mathcal{O}(g)) \iff \forall n_0 \geq 0 \quad \forall c > 0 \quad \exists n \geq n_0 \quad \neg(f(n) \leq c \cdot g(n))$$

$$\neg(f \in \mathcal{O}(g)) \iff \forall n_0 \geq 0 \quad \forall c > 0 \quad \exists n \geq n_0 \quad f(n) > c \cdot g(n)$$

Aufgabe: Wollen Funktionen nach ihrem Wachstum klassifizieren

Definition: Funktionen $f(n)$ wächst höchstens so schnell wie Funktion $g(n)$, falls ab einem $n_0 \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

$$f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\text{Formal: } f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Beispiel: $f(n) = \frac{n}{4} + 1$ und $g(n) = \sqrt{n} + 1$

Gilt auch $\frac{n}{4} + 1 \in \mathcal{O}(\sqrt{n} + 1)$?

Antwort: Nein!

Beweis: Zeigen, dass $\neg (\frac{n}{4} + 1 \in \mathcal{O}(\sqrt{n} + 1))$ gilt:

zu zeigen: $\forall n_0 \geq 0 \quad \forall c > 0 \quad \exists n \geq n_0 \quad \frac{n}{4} + 1 > c \cdot \sqrt{n} + 1$

wähle: $n = 64 \cdot c^2 \cdot (n_0 + 1)^2$

Es gilt: $\frac{n}{4} + 1 \notin \mathcal{O}(\sqrt{n} + 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{64c^2(n_0 + 1)^2}{4} + 1 &> c \cdot \sqrt{64c^2(n_0 + 1)^2} + 1 \\ 16c^2 \underbrace{(n_0 + 1)^2}_{\geq 1} + 1 &> 8c^2 \underbrace{(n_0 + 1)}_{\geq 1} + 1 \end{aligned}$$

□

Aufgabe: Wollen Funktionen nach ihrem Wachstum klassifizieren

Definition: Funktionen $f(n)$ wächst höchstens so schnell wie Funktion $g(n)$, falls ab einem $n_0 \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

$$f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\text{Formal: } f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists n_0 \geq 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Idee 1:

1 Münze wird mit allen anderen verglichen

$$n - 1$$

Idee 2:

je 2 Münzen werden entfernt

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Idee 3:

je 4 Münzen werden entfernt

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$$

Idee 4:

je k Münzen werden entfernt, danach Idee 3

$$\leq \sqrt{n} + 1$$

Idee 5:

immer halbieren

$$\log_2(n)$$

Idee 6:

immer dritteln

$$\log_3(n)$$

wachsen (bis auf konstante Faktoren) gleich schnell

$$\mathcal{O}(n)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{n})$$

wachsen (bis auf konstante Faktoren) gleich schnell

$$\mathcal{O}(\log_2(n))$$

wächst schnell

wächst langsam

wächst extrem langsam