



openHPI
Einführung in die Mathematik der Algorithmik
– Analyse des Münzwiegens

Timo Kötzing & Pascal Lenzner

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



n identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Vergleich der Ideen:

- haben bereits für 19683 Münzen verglichen

Welche Idee ist für 20000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 100000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 1000000 Münzen besser?

- benötigen allgemeine Analyse für n Münzen! (große n sind interessant)

Idee 1:

1 Münze wird mit allen anderen verglichen

$$n - 1$$

Wiege-
schritte

Idee 2:

je 2 Münzen werden entfernt

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Wiege-
schritte

Idee 3:

je 4 Münzen werden entfernt

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$$

Wiege-
schritte

Idee 4:

je k Münzen werden entfernt, danach Idee 3

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 1$$

Wiege-
schritte

Wie sollte k gewählt werden?

- k möglichst groß, damit $\frac{n}{k}$ klein
- k möglichst klein, damit $\frac{k}{4}$ klein

Sweetspot: $k = 2\sqrt{n}$

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



n identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Vergleich der Ideen:

- haben bereits für 19683 Münzen verglichen

Welche Idee ist für 20000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 100000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 1000000 Münzen besser?

- benötigen allgemeine Analyse für n Münzen! (große n sind interessant)

Idee 1:

1 Münze wird mit allen anderen verglichen

$$n - 1$$

Wiege-
schritte

Idee 2:

je 2 Münzen werden entfernt

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Wiege-
schritte

Idee 3:

je 4 Münzen werden entfernt

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$$

Wiege-
schritte

Idee 4:

je k Münzen werden entfernt, danach Idee 3

$$\leq \sqrt{n} + 1$$

Wiege-
schritte

Wie sollte k gewählt werden?

- k möglichst groß, damit $\frac{n}{k}$ klein
- k möglichst klein, damit $\frac{k}{4}$ klein

Sweetspot: $k = 2\sqrt{n}$

$$\left\lfloor \frac{n}{2\sqrt{n}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\sqrt{n}}{4} \right\rfloor + 1 \leq \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} + 1$$

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



n identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Vergleich der Ideen:

- haben bereits für 19683 Münzen verglichen

Welche Idee ist für 20000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 100000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 1000000 Münzen besser?

- benötigen allgemeine Analyse für n Münzen! (große n sind interessant)

Idee 5:

immer halbieren

Wie oft muss n halbiert werden, um auf 1 zu kommen?

höchstens $\log_2 n$ mal!

$$\begin{array}{ccccccc} n & \frac{n}{2} & \frac{n}{4} & \frac{n}{8} & \dots & & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & & \\ \frac{n}{2^0} & \frac{n}{2^1} & \frac{n}{2^2} & \frac{n}{2^3} & \dots & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^i} \leq 1 &\iff n \leq 2^i \\ &\iff \log_2 n \leq i \end{aligned}$$

Idee 6:

immer dritteln

Wie oft muss n gedrittelt werden, um auf 1 zu kommen?

höchstens $\log_3 n$ mal!

$$\begin{array}{ccccccc} n & \frac{n}{3} & \frac{n}{9} & \frac{n}{27} & \dots & & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & & \\ \frac{n}{3^0} & \frac{n}{3^1} & \frac{n}{3^2} & \frac{n}{3^3} & \dots & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{3^i} \leq 1 &\iff n \leq 3^i \\ &\iff \log_3 n \leq i \end{aligned}$$

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



n identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Vergleich der Ideen:

- haben bereits für 19683 Münzen verglichen

Welche Idee ist für 20000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 100000 Münzen besser?

Welche Idee ist für 1000000 Münzen besser?

- benötigen allgemeine Analyse für n Münzen! (große n sind interessant)

Idee 1:

1 Münze wird mit allen anderen verglichen

$$n - 1$$

Idee 2:

je 2 Münzen werden entfernt

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

Idee 3:

je 4 Münzen werden entfernt

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1$$

Idee 4:

je k Münzen werden entfernt, danach Idee 3

$$\leq \sqrt{n} + 1$$

Idee 5:

immer halbieren

$$\log_2(n)$$

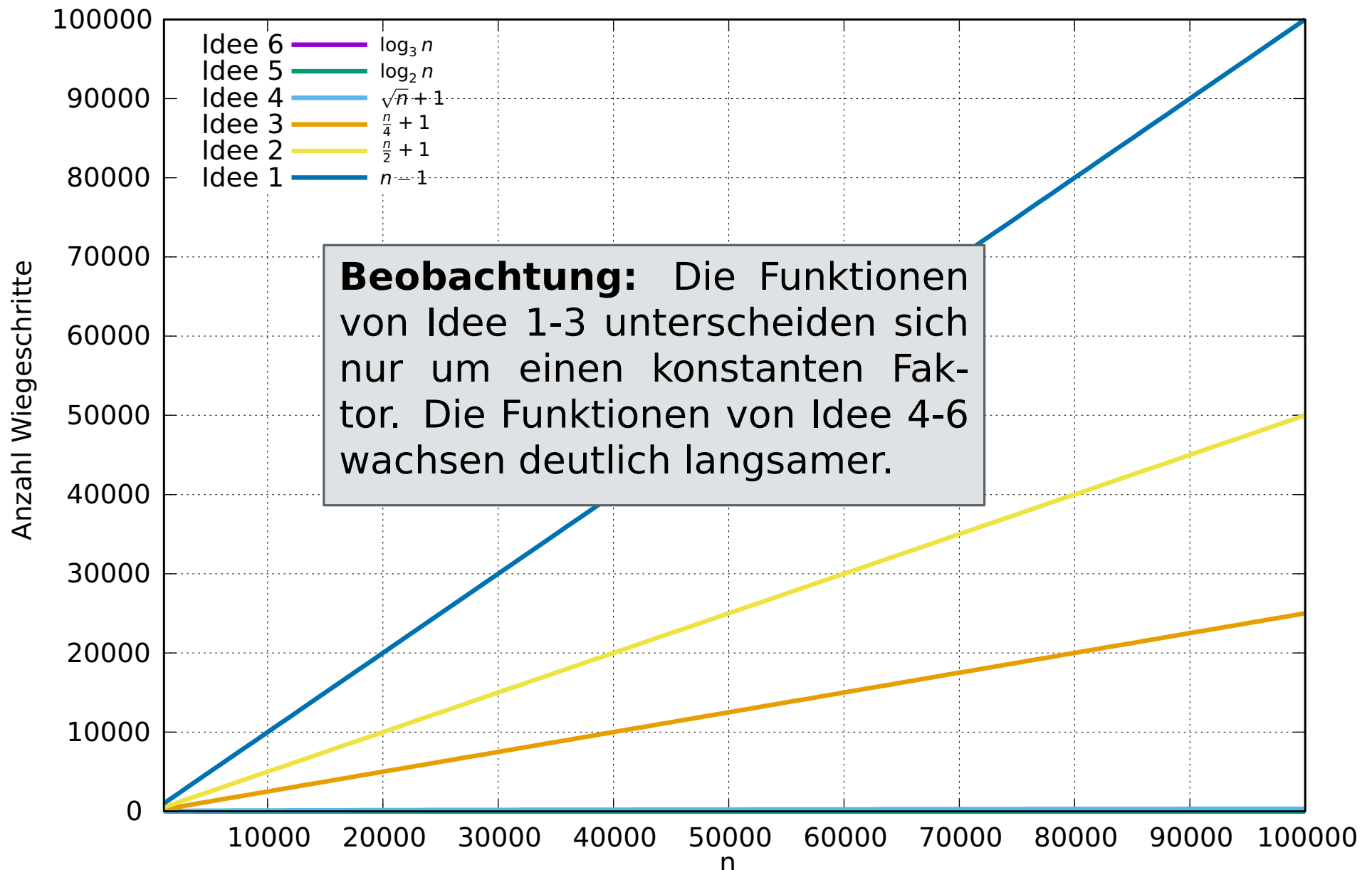
Idee 6:

immer dritteln

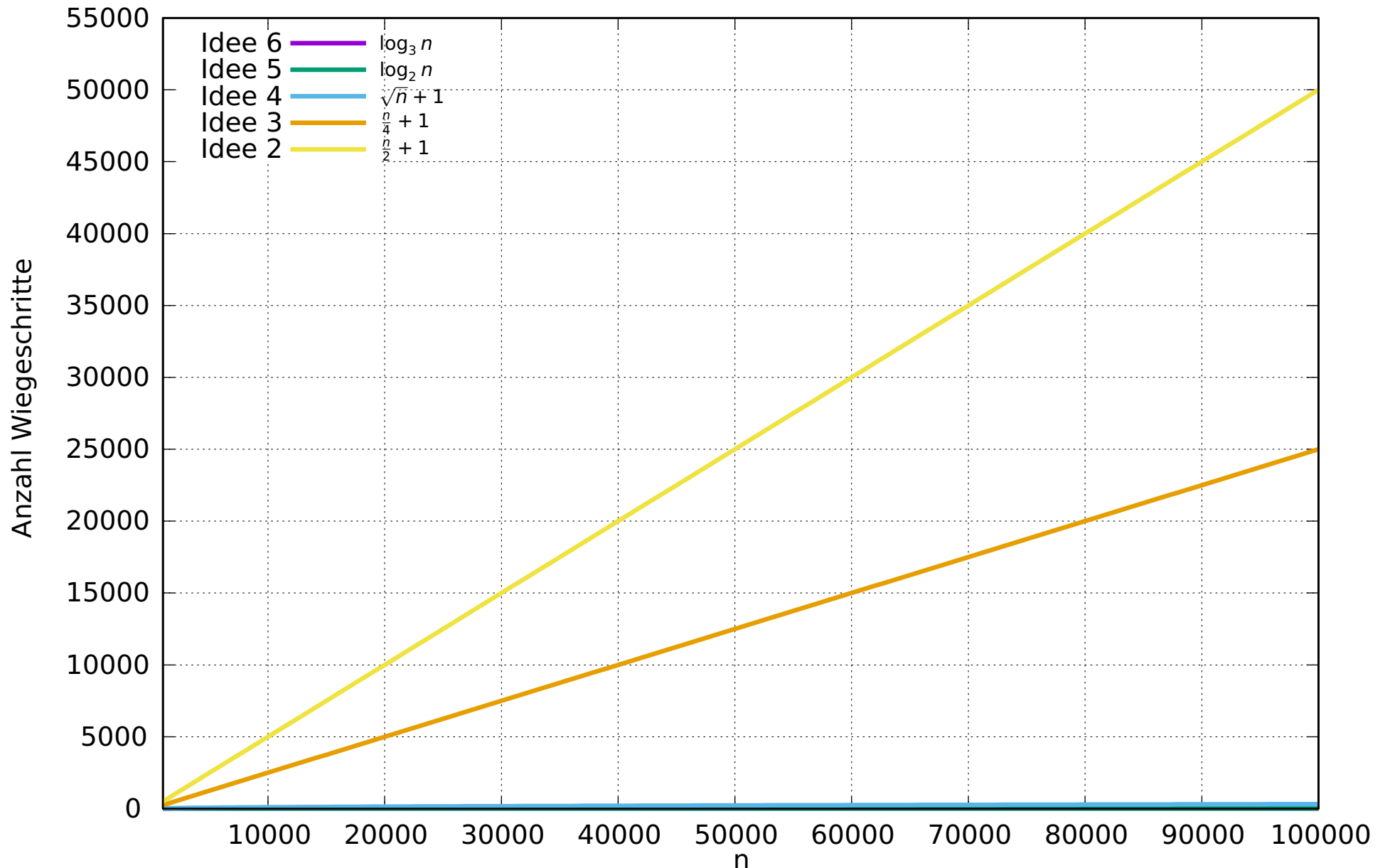
$$\log_3(n)$$

Wie verhalten sich die Funktionen für wachsendes n ?

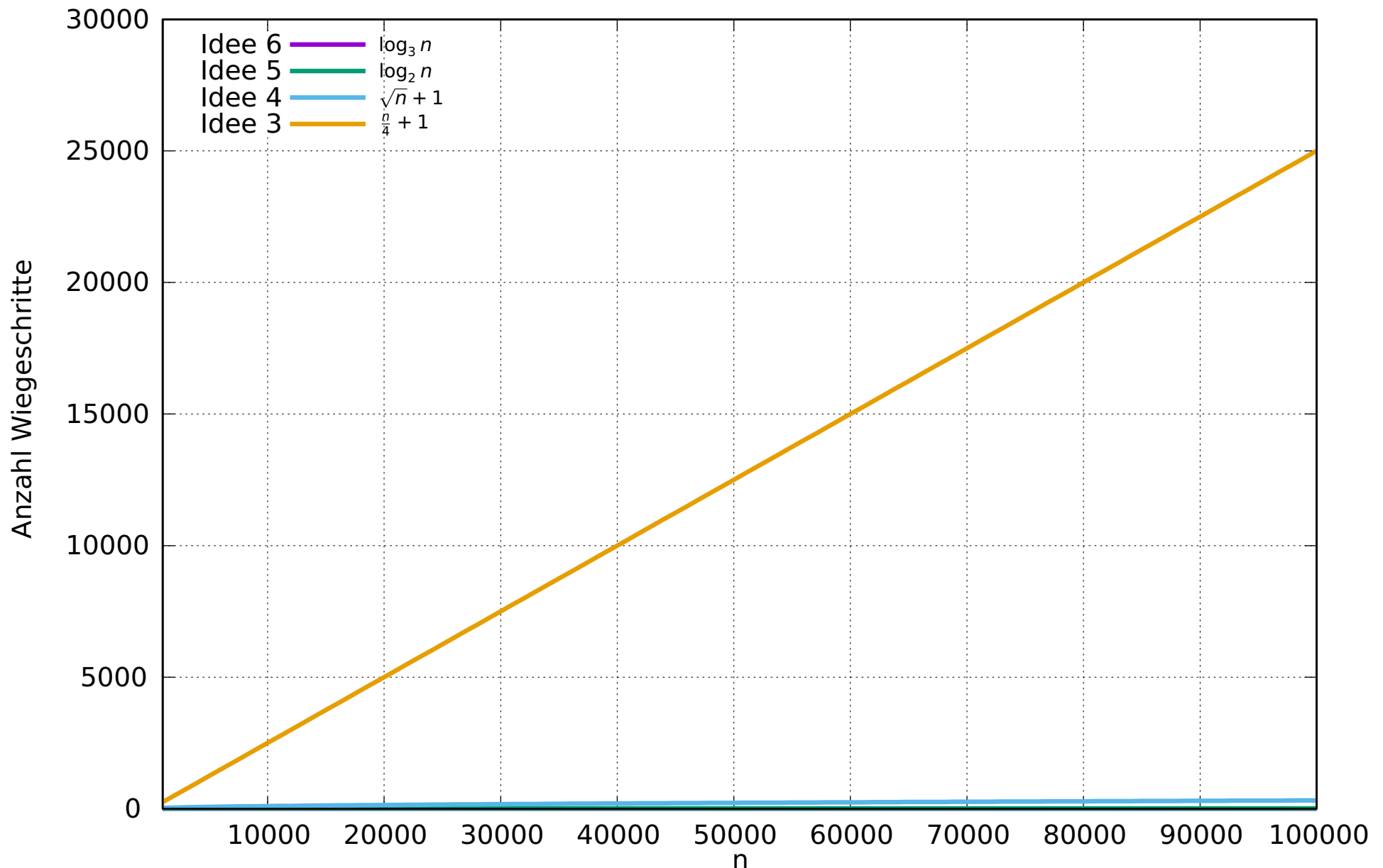
Vergleich der Ideen



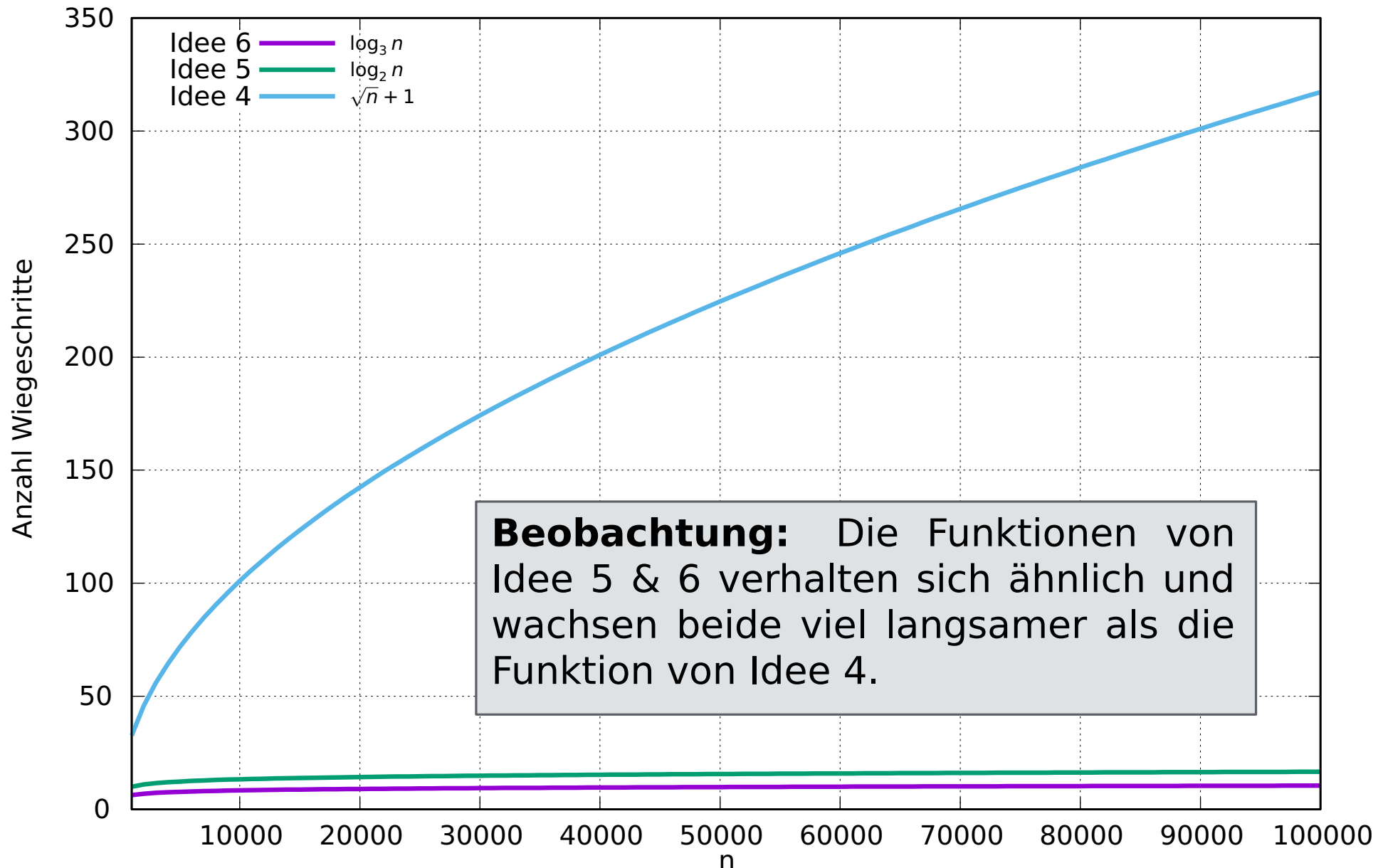
Vergleich der Ideen



Vergleich der Ideen



Vergleich der Ideen



Vergleich der Ideen

