



openHPI
Einführung in die Mathematik der Algorithmik
– Münzwiegen

Timo Kötzing & Pascal Lenzner

Hasso-Plattner-Institut

Universität Potsdam

Gegeben:



Balkenwaage



19683 identisch aussehende
Münzen, genau eine davon
ist gefälscht (leichter)

Aufgabe Finde die falsche Münze mit so wenigen
Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegenschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen
verteilen und gegeneinander wiegen

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



19683 identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Algorithmische Ideen:

Idee 1: ■ wiege 2 beliebige Münzen gegeneinander; falls eine leichter: fertig!

worst-case:
19682 mal
wiegen!

- falls noch nicht fertig: wähle eine der beiden Münzen als Referenzmünze (ist garantiert echt)
- vergleiche alle anderen 19681 Münzen einzeln mit der Referenzmünze

Idee 2: ■ wiege 2 beliebige Münzen gegeneinander; falls eine leichter: fertig!

worst-case:
9841 mal
wiegen!

- falls noch nicht fertig (beide waren gleich schwer): wiege 2 *andere* Münzen gegeneinander
- wiederhole bis falsche Münze gefunden ist

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



19683 identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Algorithmische Ideen:

Idee 3:

worst-case:
4921 mal
wiegen!

$$4921 = \left\lfloor \frac{19683}{4} \right\rfloor + 1$$

- wiege Waagschalen mit je 2 beliebigen Münzen gegeneinander; falls eine leichter: Wiege Münzen in der leichteren Schale gegeneinander
- falls gleich schwer: Wiege 4 *andere* Münze mit selbigem Verfahren
- wiederhole, bis falsche Münze gefunden (+1 Wiegeschritt, falls ungerade viele Münzen)

Funktion $\lfloor x \rfloor$ rundet x auf nächst kleinere ganze Zahl ab

Idee 4:

worst-case:

$k = 8$: 2462
 $k = 50$: 406
 $k = 282$: 140
 $k = 500$: 164

- wie Idee 3, aber versuche k statt vier Münzen zu entfernen
- löse verbleibendes Teilproblem mit $\leq k$ Münzen mit Idee 3.

Analyse: ■ $\leq \left\lfloor \frac{19683}{k} \right\rfloor$ Wiegeschritte bis nur noch $\leq k$ Kandidaten übrig

■ $\leq \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 1$ zusätzliche Wiegeschritte

$$\text{minimiere } \left\lfloor \frac{19683}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 1$$

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



19683 identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Algorithmische Ideen:

- Idee 5:**
- teile Münzen in 2 gleich große Haufen (entferne 1 Münze, falls nötig); wiege Münzhaufen gegeneinander;
 - falls Gleichheit: fertig (entferte Münze ist gefälscht); sonst wiederhole Verfahren mit dem leichteren Haufen
 - Abbruch, falls nur noch eine Münze übrig (muss falsche Münze sein)

- Analyse:**
- worst-case: Finden gefälschte Münze erst am Ende
 - nach jedem Wiegeschritt nur noch höchstens halb so viele Kandidaten wie vorher
 - wie viele Wiegeschritte bis zum Abbruchfall?

worst-case:
14 mal wiegen!

Geht es noch
besser?

$19683 \rightarrow 9841 \rightarrow 4920 \rightarrow 2460 \rightarrow 1230 \rightarrow 615 \rightarrow 307 \rightarrow 153 \rightarrow 76 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 = 14 \text{ Wiegeschritte!}$

Aufgabe: Finde die falsche Münze mit so wenigen Wiegeschritten wie möglich!

1 Wiegeschritt = beliebig viele Münzen auf beide Waagschalen verteilen und gegeneinander wiegen



Balkenwaage



19683 identisch aussehende Münzen, genau eine davon ist gefälscht (leichter)

Algorithmische Ideen:

- Idee 6:**
- teile Münzen in **3** gleich große Haufen (entferne 1 oder 2 Münzen, falls nötig); wiege **zwei** der Münzhaufen gegeneinander;
 - falls Gleichheit: wiederhole Verfahren mit dem nicht gewogenen Haufen (inkl. der 1 oder 2 entfernten Münzen)
 - Abbruch, falls nur noch höchstens drei Münze übrig; danach noch 1 Wiegeschritt

- Analyse:**
- worst-case: Finden gefälschte Münze erst am Ende
 - nach jedem Wiegeschritt nur noch etwa **ein Drittel** so viele Kandidaten wie vorher
 - wie viele Wiegeschritte bis zum Abbruchfall?

worst-case:
9 mal wiegen!

$19683 \rightarrow 6561 \rightarrow 2187 \rightarrow 729 \rightarrow 243 \rightarrow 81 \rightarrow 27 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
= 9 Wiegeschritte!